

УДК 532.5 + 621.311

**В.К. Ахметов**

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ОСНОВАНИЯМИ

На основе решения полной системы уравнений Навье — Стокса численно исследована задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре с вращающимися основаниями. Система уравнений записана в переменных функция тока, завихренность и азимутальная скорость. Для решения уравнения Пуассона использовался прямой метод неполной редукции. Уравнения переноса решались с использованием явной конечно-разностной схемы. Диффузионные члены аппроксимировались центральными разностями. Для аппроксимации конвективных членов употреблялась модифицированная схема Леонарда с квадратичными разностями против потока, в которой явным образом выделялась классическая противоточная схема, а в источниковую часть уравнения добавлялись соответствующие корректирующие потоки. Для аппроксимации производных по времени использовалась схема Эйлера. Важная особенность исследуемых течений состоит в том, что при достижении критической величины начальной закрутки в потоке образуются приосевые рециркуляционные зоны. Форма и характер этих зон сходны с аналогичными формированиями в закрученных потоках при распаде вихревого течения. Получены различные режимы течений с формированием таких крупномасштабных вихревых структур. Проведено сравнение результатов вычислений с имеющимися экспериментальными данными и численными решениями.

**Ключевые слова:** уравнения Навье — Стокса, численный метод, закрученные потоки, рециркуляционные зоны.

Закрученные течения имеют широкое применение в гидротехническом строительстве. В отсасывающих трубах гидротурбин формируется турбулентный закрученный поток. В современных гидроэлектростанциях активно эксплуатируются водосбросы с закрученными потоками (вихревые водосбросы). Коаксиальные потоки, закрученные в противоположных направлениях, используются для гашения энергии в высокоскоростном потоке воды (контрвихревые гасители энергии).

Одна из отличительных особенностей закрученных течений заключается в распаде вихря и формировании приосевых рециркуляционных зон [1]. Экспериментальные исследования этого явления проводятся как в вихревых трубах и камерах, так и замкнутых цилиндрических объемах.

Рассмотрим задачу о течении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре, нижнее и верхнее основание которого могут вращаться как в одинаковом, так и в противоположном направлениях с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Схема такого течения показана на рис. 1, а обзор работ приведен в [2, 3]. В предположении ламинарности и осесимметричности потока данные течения описываются полной системой уравнений Навье — Стокса, которую в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  относительно функции тока  $\psi$ , завихренности  $\Omega$  и азимутальной скорости  $V_\varphi$  представим в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (V_r \Omega) = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\varphi)^2}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(V_z V_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r V_r V_\varphi) + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{V_\varphi}{r^2} \right], \quad (3)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \Omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}. \quad (4)$$

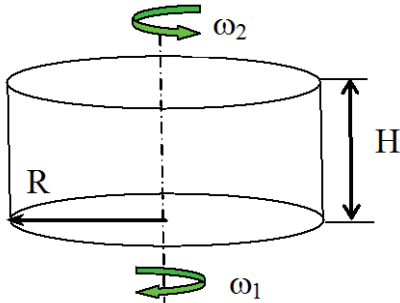


Рис. 1. Схема течения

Система уравнений (1)—(4) записана в консервативной безразмерной форме. В качестве характерного линейного размера взят радиус цилиндра  $R$ . Осевая  $V_z$ , радиальная  $V_r$  и азимутальная  $V_\varphi$  скорости отнесены к величине  $\omega_1 R$ . Параметрами задачи являются число Рейнольдса  $\text{Re} = \omega_1 R^2 / \nu$ , в котором  $\nu$  — кинематическая вязкость, отношение высоты цилиндра к радиусу основания  $h = H/R$  и отношение угловых скоростей вращения оснований цилиндра  $\gamma = \omega_2 / \omega_1$ .

Течение рассматривается в цилиндрической области  $D$  ( $0 \leq z \leq h$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ), ограниченной осью симметрии, плоскостями  $z=0$ ,  $z=h$  и поверхностью вращения  $r=1$ . Граничные условия включают в себя условия прилипания на боковой поверхности и основаниях цилиндра и условий симметрии на оси  $r=0$ :

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad V_\varphi = \omega_1 r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad z = 0, \\ \psi = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad 0 \leq z \leq h, \\ \psi = 0, \quad V_\varphi = \omega_2 r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad z = h, \\ \psi = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad \Omega = 0, \quad r = 0, \quad 0 \leq z \leq h. \end{aligned} \quad (5)$$

Для численного решения краевой задачи (1)—(4) с граничными условиями (5) использовался конечно-разностный метод установления и находилось предельное решение, устанавливающееся при  $t \rightarrow \infty$  от заданных начальных условий:

$$\Omega = \Omega_0(r, z), \quad V_\varphi = V_{\varphi 0}(r, z), \quad t = 0, \quad (r, z) \in D.$$

Решение уравнения Пуассона (1) определялось по методу неполной редукции [4], сочетающему в себе разложение искомой функции в ряд Фурье по направлению  $z$  и серию трехточечных прогонок в направлении  $r$ . Данный метод успешно применялся для расчета закрученных течений различных типов в [1].

Рассмотрим конечно-разностную схему для решения уравнений переноса (2)—(3). Будем считать, что исходная область  $D$ , в которой определяется решение задачи, покрыта равномерной сеткой с шагами  $h_1, h_2$  в направлениях  $r$  и  $z$  соответственно. Введем в рассмотрение шаблон схемы типа «крест» со следующими обозначениями:  $P$  — центральный узел;  $E, N, W, S$  — соседние с ним (сверху, справа, снизу и слева соответственно);  $EE, NN, WW, SS$  — следующие за ними.

Для решения уравнения переноса завихренности (2) введем переменную  $\Phi$  и обозначим  $\Phi = \Omega$ . Применяя центральные разности для аппроксимации диффузионных членов в соответствии с выбранным шаблоном, схему Эйлера для аппроксимации производной по времени и записывая источник член в линеаризованной форме

$$S_{\Omega} = S_P \Omega + S_c, \quad S_P = 0, \quad S_c = \frac{1}{r} \frac{\partial (V_{\varphi}^2)}{\partial z},$$

разностное уравнение для переноса завихренности можно представить в виде

$$\frac{\Phi_P^k - \Phi_P^{k-1}}{\Delta t} h_1 h_2 + a_P \Phi_P^k = a_E \Phi_E^{k-1} + a_W \Phi_W^{k-1} + a_N \Phi_N^k + a_S \Phi_S^k + b, \quad (6)$$

где  $k$  — номер итерации по времени,  $\Delta t$  — шаг по времени.

Одним из важнейших свойств закрученных потоков является образование областей возвратного течения с низкой скоростью рециркуляции. Для достоверного описания структуры таких рециркуляционных областей необходимо обеспечить наиболее точную аппроксимацию конвективных членов в уравнениях переноса (2), (3). Воспользуемся модифицированной схемой Леонарда третьего порядка точности. В коэффициентах уравнения (6) выделим конвективную  $a^c$  и диффузионную  $a^d$  части, например,  $a_E = a_E^c + a_E^d$ . Тогда в соответствии с [5] получим:

$$\begin{aligned} a_i &= |a_{i1}| + a_{i1}, \quad i = E, N, S, W, \\ a_{E1} &= -0,5V_{ze} h_1, \quad a_{W1} = 0,5V_{ze} h_1, \quad a_E^d = \frac{1}{\text{Re}} \frac{h_1}{h_2}, \quad a_W^d = \frac{1}{\text{Re}} \frac{h_1}{h_2}, \\ a_{N1} &= -0,5V_{rn} h_2, \quad a_{S1} = 0,5V_{rs} h_2, \quad a_N^d = \frac{h_2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{2r_N} \right), \quad a_S^d = \frac{h_2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{2r_S} \right), \\ a_P^d &= 2 \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{h_1} \right), \quad a_P^c = a_E^c + a_W^c + a_N^c + a_S^c, \quad a_P = a_P^c + a_P^d - S_P h_1 h_2, \\ b &= S_c h_1 h_2 + (\text{COR}_e - \text{COR}_w) h_1 + (\text{COR}_n - \text{COR}_s) h_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким же образом можно получить конечно-разностную схему для решения уравнения переноса (3). Представляя источниковый член в линеаризованной форме  $S_{\varphi} = S_P V_{\varphi} + S_c$  и обеспечивая выполнение неравенства  $S_P \leq 0$ :

$$S_P = -\frac{1}{\text{Re} r^2} - \frac{V_r}{r}, \quad S_c = 0, \quad V_r > 0, \quad S_P = -\frac{1}{\text{Re} r^2}, \quad S_c = -\frac{V_{\varphi} V_r}{r}, \quad V_r \leq 0,$$

уравнение переноса (3) в разностной форме примет вид (6), в котором  $\Phi = V_{\varphi}$ . Значения коэффициентов  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_P$  определяются в нем по-прежнему выражениями из (7), а остальные рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{N1} &= -0,5 \frac{r_n}{r_P} V_{rn} h_2, \quad a_{S1} = 0,5 \frac{r_s}{r_P} V_{rs} h_2, \quad a_N^d = \frac{r_n}{r_P} \frac{1}{\text{Re}} \frac{h_2}{h_1}, \quad a_S^d = \frac{r_s}{r_P} \frac{1}{\text{Re}} \frac{h_2}{h_1}, \\ b &= S_c h_1 h_2 + (\text{COR}_e - \text{COR}_w) h_1 + \frac{1}{r_P} (\text{COR}_n - \text{COR}_s) h_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Корректирующие потоки в выражениях (7), (8) могут быть компактно записаны в виде

$$\text{COR}_i = \frac{1}{4} l |a_{i1}| (\Phi_{i1-2l} + \Phi_{i1-l} - 3\Phi_{i1}), \quad i = e, n, s, w,$$

$$l = \text{sign}(a_{i1}), \quad i1 = P + l_1, \quad l_1 = \begin{cases} 1, & l > 0; \\ 0, & l \leq 0. \end{cases}$$

Решение разностного уравнения (6) для  $\Omega$  и  $V_{\varphi}$  с учетом (7), (8) осуществляется методом прогонки в направлении  $r$ .

Общая последовательность решения системы (1)—(4) была следующей. Для каждого шага по времени сначала решалось уравнение Пуассона (1) относительно  $\psi$ , далее рассчитывались значения  $V_z$ ,  $V_r$  по формулам (4), затем решалось уравнение (3) для  $V_\varphi$ , после чего определялось поле завихренности из (2).

Вычисления полей течений, отвечающие краевой задаче (1)—(5), проводились при следующих значениях параметров:  $100 \leq Re \leq 2500$ ,  $0,1 \leq h \leq 3$ ,  $0 \leq \gamma \leq 2$ . Для большинства расчетов использовалась равномерная сетка размером  $150 \times 256$ , шаг по времени составлял  $\Delta t = 0,03 \dots 0,2$ .

Выборочные результаты расчетов приведены на рис. 2—4. Картина линий тока в случае неподвижного нижнего основания и вращающегося верхнего основания цилиндра показана на рис. 2, а. Основной особенностью данного течения является наличие приосевой рециркуляционной области, ограниченной точками торможения на оси потока. На рис. 3, а изображена рассчитанная картина линий тока при вращении оснований цилиндра в одинаковых направлениях. В этом случае происходит разделение потока на две симметричные области течения, в которых также имеются области рециркуляции. На рис. 4 представлена рассчитанная картина линий тока в цилиндре с вращающимся нижним основанием, которая наложена на поле течения, полученное экспериментально.

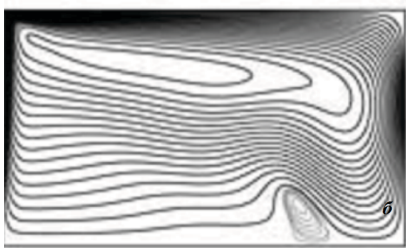
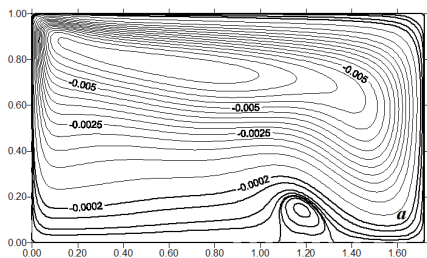


Рис. 2. Сравнение линий тока (а) с результатами расчетов [6] (б) при  $Re = 2000$ ;  $h = 1,72$ ;  $\gamma = 0$

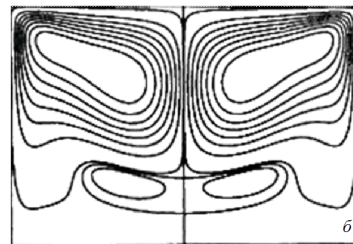
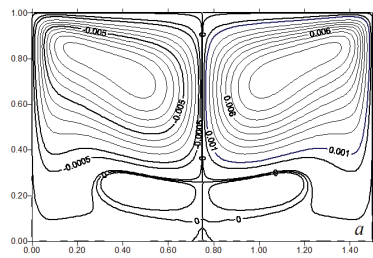


Рис. 3. Сравнение линий тока (а) с результатами расчетов [7] (б) при  $Re = 1000$ ;  $h = 1,5$ ;  $\gamma = 1$

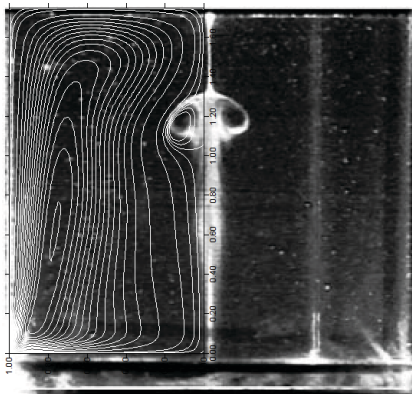


Рис. 4. Сравнение с экспериментами [8] при  $Re = 1850$ ;  $h = 1,75$ ;  $\gamma = 0$

Сравнение картин течений с имеющимися расчетами [6], [7], показанными на рис. 2, б и 3, б, а также экспериментальными данными [8] на рис. 4, подтверждает достоверность полученных результатов и позволяет рекомендовать использование разработанной методики для дальнейших численных исследований закрученных потоков подобной конфигурации.

#### Библиографический список

1. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений : монография. М. : Изд-во АСВ, 2009. 176 с.
2. Tan B.T., Liow K.S., Mununga L., Thompson M.C., Hourigan K. Simulation of the control of vortex breakdown in a closed cylinder using a small rotating disk // *Physics of Fluids*. 2009. V. 21. № 2. P. 024104-8.
3. Sreenivasan B., Davidson P.A. On the formation of cyclones and anticyclones in a rotating fluid // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. № 8. P. 085104-11.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 592 с.
5. Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comp. Meth. Appl. Mech and Eng.* 1979. V. 19. № 1. P. 59—98.
6. Lopez J.M. Rotating and modulated rotating waves in transitions of an enclosed swirling flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 553. P. 323—346.
7. Gelfgat A. Yu., Bar-Yoseph P.Z. Multiple solutions and stability of confined convective and swirling flows – a continuing challenge // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2004. V. 14. № 2. P. 213-241.
8. Spohn A., Mory M., Hopfinger E.J. Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 370. P. 73—99.

Поступила в редакцию в феврале 2012 г.

Об авторе: Ахметов Вадим Каюмович — доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 8-(499)-183-59-94, vadim.akhmetov@gmail.com.

Для цитирования: Ахметов В.К. Математическое моделирование течения вязкой жидкости в цилиндре с вращающимися основаниями // Вестник МГСУ. 2012. № 2. С. 41—46.

V.K. Ahmetov

#### AERODYNAMICS OF SWIRLING FLOWS IN GAS OUTLET PIPES OF HEAT GENERATING PLANTS

The intermixing of hot turbulent gases in an axisymmetric channel with lateral surfaces of arbitrary shape and a pre-swirled flow is considered in the paper. This problem is relevant in connection with the development of new high-tech designs of natural fuel combustion facilities. Any designs are to comply with specific requirements. The temperature of the flue gas must not fall below a certain limit to prevent promotion of condensation that facilitates pipe corrosion. The gas outlet velocity must exceed 4 m/s to prevent the downdraft. The concentration of pollutants released into the atmosphere must fall within permissible limits. The mathematical model is based on parabolized Navier-Stokes equations that restrict its applicability to continuous flows. However, in view of the mechanical nature of the problem considered, continuous flows are of particular interest. The method of equal flow-rate surfaces is used as a numerical solution. The system of equations is based on streamlines. The net of lines is not available beforehand; therefore, it is constructed alongside with the problem solution. The system of equations is completed by an algebraic turbulence model. The proposed method makes it possible to check for the optimal flow regimes inside high-rise stack structures to assure that pollutant-containing smokes and gases, emitted into the atmosphere, produce the minimal damage onto the environment.

**Key words:** Navier-Stokes equations, numerical method, swirling flows, intermixing of gases.

#### References

1. Ahmetov V.K., Shkadov V.Ja. *Chislennoe modelirovanie vjazkih vihrevyh techenij dlja tehniceskikh prilozhenij* [Numerical Modelling of Viscous Vorticity Flows for Technological Applications], a monograph, Moscow, ASV, 2009, 176 p.

2. Tan B.T., Liow K.S., Mununga L., Thompson M.C., Hourigan K. Simulation of the Control of Vortex Breakdown in a Closed Cylinder Using a Small Rotating Disk, *Physics of Fluids*, 2009, Issue # 21, pp. 024104-8.
3. Sreenivasan B., Davidson P.A. On the Formation of Cyclones and Anticyclones in a Rotating Fluid, *Phys. Fluids*, 2008, Issue # 20, 085104-11.
4. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. *Metody reshenija setochnyh uravnenij* [Methods of Solving Finite-Difference Equations], Moscow, Nauka, 1978, 592 p.
5. Leonard B.P. A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Comp. Meth. Appl. Mech and Eng*, 1979, Issue # 1, pp. 59—98.
6. Lopez J.M. Rotating and Modulated Rotating Waves in Transitions of an Enclosed Swirling Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, Issue # 553, pp. 323—346.
7. Gelfgat A. Yu., Bar-Yoseph P.Z. Multiple Solutions and Stability of Confined Convective and Swirling Flows – a Continuing Challenge, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2004, Issue # 14, pp. 213-241.
8. Sponh A., Mory M., Hopfinger E.J. Experiments on Vortex Breakdown in a Confined Flow Generated by a Rotating Disc, *J. Fluid Mech*, 1998, Issue # 370, pp. 73—99.

About the author: **Vadim Kajumovich Ahmetov** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MSUCE)**, 26 Jaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia, vadim.akhmetov@gmail.com, 8 (499) 183-59-94.

For citation: Ahmetov V.K. *Matematicheskoe modelirovanie techenija vjzkoj zhidkosti v cilindre s vrawajuwimisja osnovanijami* [Aerodynamics of Swirling Flows in Gas Outlet Pipes of Heat Generating Plants], *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2012, Issue # 2, pp. 41—46.